Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

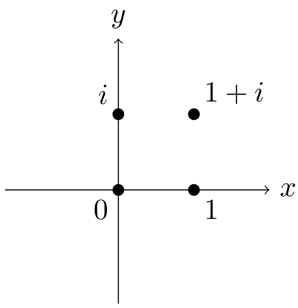
Bonus Blatt I

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 07.12, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Die folgenden vier Aufgabe können als eine große Aufgaben betrachtet werden. Insbesondere können Sie die in jedem Punkt genannten Ergebnisse für die nachfolgenden Punkte verwenden.

Bonus Aufgabe I.1 ($2+2+4+4+4+4+4+4$ Punkte) Wir betrachten die komplexe Zahlen $\mathbb{C}$. Wenn man den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$ verwendet, kann man sich $\mathbb{C}$ als die komplexe Ebene $\mathbb{R}^2$ vorstellen: die x-Achse entspricht denn die reelle Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Außerdem, die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ entspricht den Betrag

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$



Eine komplexe affine Transformation $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die Form $f(z) = az+b$, mit $a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$a = a' + ia'',\ b = b' + ib'',\ z = x + iy$$

mit $a', a'', b', b'', x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass

$$f(x+iy) = ((a'x - a''y) + i(a''x + a'y)) + (b' + ib'')$$

Wir schreiben dies mit dem Real- und Imaginärteil als die Abbildung

$$\Phi(f)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' & -a'' \\ a'' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix}$$

so dass $\Phi(f)$ eine reelle affine Transformation ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} a' & -a'' \\ a'' & a' \end{pmatrix} = |a|^2$$

Insbesondere ist $\Phi(f)$ eine affine Transformation.

Das definiert eine Abbildung

$$\Phi\colon \operatorname{Aff}(\mathbb{C}) \to \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2), \qquad f \mapsto \Phi(f)$$

(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon \operatorname{Aff}(\mathbb{C}) \to \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ ein injektives Gruppenhomomorphismus ist. Zeigen Sie auch, dass Φ nicht surjektiv ist.

Wir wollen das Bild von Φ bestimmen:

(iv) Wir betrachten drei Arten von komplexe affine Transformationen

$$\begin{aligned} t_b\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto z + b, && b \in \mathbb{C}, \\ s_\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto \lambda \cdot z, && \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \\ r_\theta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto e^{i\theta} \cdot z, && \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Wenn wir diese als reelle affine Transformationen betrachten, zeigen Sie, dass $\Phi(t_b)$ eine reelle Translation ist, dass $\Phi(s_\lambda)$ eine reelle zentrische Streckung ist, und dass $\Phi(r_\theta)$ eine reelle Drehung mit Winkel θ ist.

(v) Zeigen Sie, dass das Bild von $\Phi\colon \operatorname{Aff}(\mathbb{C}) \to \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ genau die Untergruppe von $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ ist, die von den Translationen, den zentrische Streckungen und den Drehungen erzeugt wird. *Diese Tatsache wird für die folgenden Punkte sehr hilfreich sein.*

Wir erinnern uns, dass eine lineare Transformation $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ winkeltreu ist, wenn A den Winkel zwischen zwei Vektoren erhaltet (siehe auch die Übungsaufgabe 6.1). Eine affine Transformation $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(v) = Av + w$, mit $A \in GL_2(\mathbb{R}), w \in \mathbb{R}^2$ heißt winkeltreu, wenn A winkeltreu ist.

(vi) Seien $F, G \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ winkeltreue affine Transformationen. Zeigen Sie, dass $F \circ G$ winkeltreu ist.

(vii) Sei $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{C})$ und sei $\Phi(f) \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass $\Phi(f)$ winkeltreu ist.

(viii) Nicht alle winkeltreue Abbildungen haben die Form $\Phi(f)$: finden Sie, eine winkeltreue Abbildung, $G \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass $G \notin \Phi(\operatorname{Aff}(\mathbb{C}))$.

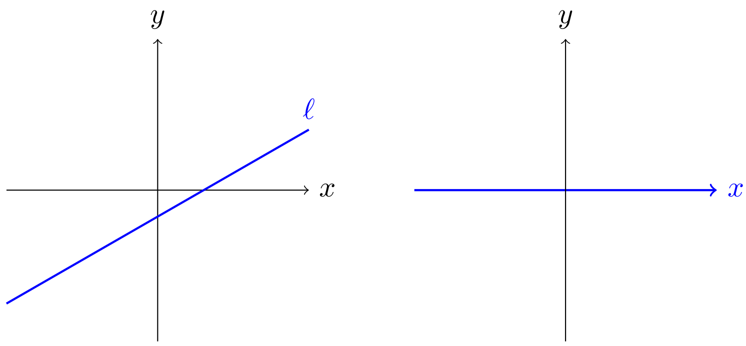
Bonus Aufgabe I.2 (4 + 4 + 4 Punkte) Nun wollen wir uns das Zusammenspiel zwischen komplexen affinen Transformationen und einigen reellen geometrischen Standardkonzepten ansehen.

Eine **reelle Gerade** in $\mathbb{C}$ ist eine Menge

$$\ell = \{z = x + iy \mid ax + by = 0\} \qquad \text{für } a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq 0$$

Zum Beispiel, die Menge von reelle Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist eine reelle Gerade.

(ix) Sei $\ell \subseteq \mathbb{C}$ eine reelle Gerade und sei $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $f(\ell)$ auch eine reelle Gerade ist. Außerdem, zeigen Sie, dass eine $g \in \operatorname{Aff}(\mathbb{C})$ existiert, so dass $g(\ell) = \mathbb{R}$.



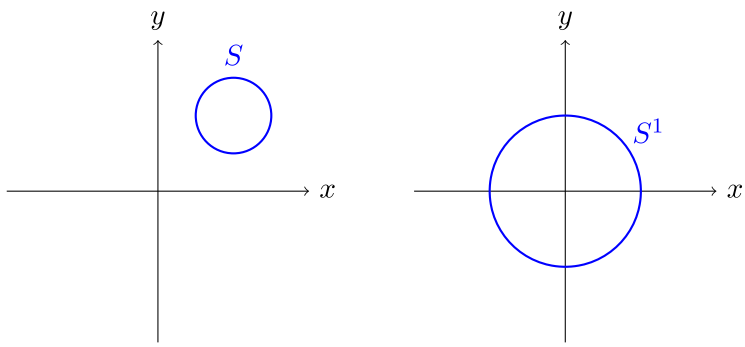
Ein **reeller Kreis** in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Menge

$$S_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

Der Einheitskreis ist der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.

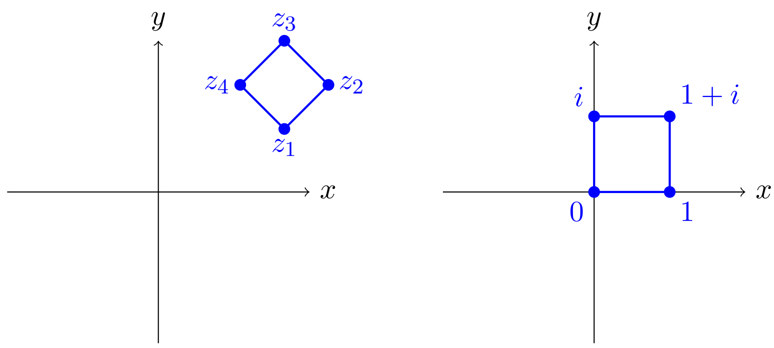
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

(x) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ ein reeller Kreis und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $f(S)$ ein reeller Kreis ist. Außerdem, zeigen Sie, dass eine komplexe affine Transformation $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ existiert, so dass $g(S) = S^1$.



Ein **reeller Viereck** ist durch vier paarweise verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ gegeben, so dass $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_4| = |z_4 - z_1|$. Die Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 sind die Ecken des Vierecks.

(xi) Zeigen Sie, dass eine komplexe affine Transformation $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert, so dass $f(z_1) = 0, f(z_2) = 1, f(z_3) = 1 + i, f(z_4) = i$.



Bonus Aufgabe I.3 (4 + 4 + 4 + 4 + 4 Punkte) Wir betrachten nun die komplexe projektive Gerade als die Vereinigung von $\mathbb{C}$ und dem Fernpunkt:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_1 \cup \{[1,0]\} = \{[z,1] \mid z \in \mathbb{C}\} \sqcup \{[1,0]\} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$$

Wir betrachten auch die Gruppe $PGL_2(\mathbb{C})$ von alle Möbiustransformationen von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Jede Möbiustransformation kann als gebrochene lineare Funktion dargestellt werden:

$$f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0$$

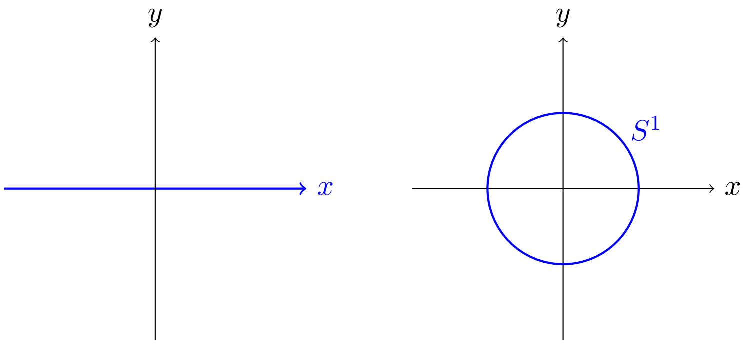
Insbesondere können wir $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ als Teilmenge von $PGL_2(\mathbb{C})$ betrachten:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow PGL_2(\mathbb{C}), \quad (f(z) = az+b) \mapsto \left(f(z) = \frac{az+b}{0z+1}\right)$$

(xii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}) = \{f \in PGL_2(\mathbb{K}) \mid f(\infty) = \infty\}$.

Punkte (ix) und (x) zeigen, dass jede komplexe affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ reelle Geraden nach reelle Gerade schickt und reelle Kreise nach reelle Kreise. Wenn wir nicht nur affine Transformationen, aber auch Möbiustransformationen verwenden, können wir reelle Geraden in reelle Kreise verwandeln:

(xiii) Finden Sie eine explizite Möbiustransformation $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ so dass $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1$.



Dies hat Auswirkungen auf das Doppelverhältnis

(xiv) Sei $\ell \subseteq \mathbb{C}$ eine reelle Gerade und seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \ell \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie, dass $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ reell ist.

(xv) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ ein reeller Kreis und seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S$. Zeigen Sie, dass $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ reell ist.

(xvi) Seien z_1, z_2, z_3, z_4 die Ecke eines reelles Vierecks, im Uhrzeigersinn geordnet. Zeigen Sie, dass $(z_1, z_2; z_3, z_4) = -1$.

Die folgende Übung ist schwieriger und wird nicht benotet, aber Sie können gerne darüber nachdenken.

Bonus Aufgabe I.4 (0 + 0 + 0 Punkte) Wir können genauer sein: das Bild von $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unter einer Möbiustransformation ist entweder ein reeller Kreis oder eine Menge der Form $\ell \cup \{\infty\}$, für eine reelle Gerade $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$:

(xvii) Sei $f \in PGL_2(\mathbb{C})$ eine Möbiustransformation. Zeigen Sie, dass $\infty \in f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ genau dann, wenn eine reelle Gerade $\ell \subseteq \mathbb{C}$ existiert, so dass $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \ell \cup \{\infty\}$. [*Hinweis*: wenn $\infty \in f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, betrachten Sie zuerst die Zwei Fälle $f(\infty) = \infty$ und $f(0) = 0$.]

(xviii) Sei $f \in PGL_2(\mathbb{C})$ eine Möbiustransformation. Zeigen Sie, dass $\infty \notin f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ genau dann, wenn $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ ein reeller Kreis ist. [*Hinweis*: wenn $\infty \notin f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, betrachten sie zuerst den Fall $f(\infty) = 1$ und $f(0) = -1$.]

Wir können dann charakterisieren, wann das Doppelverhältnis von vier Punkten in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ real ist:

(xix) Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ reell ist, genau dann, wenn eine relle Gerade $\ell \subseteq \mathbb{C}$ existiert, so dass $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \ell \cup \{\infty\}$ oder wenn eine reelle Kreise $S \subseteq \mathbb{C}$ existiert, so dass $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S$.